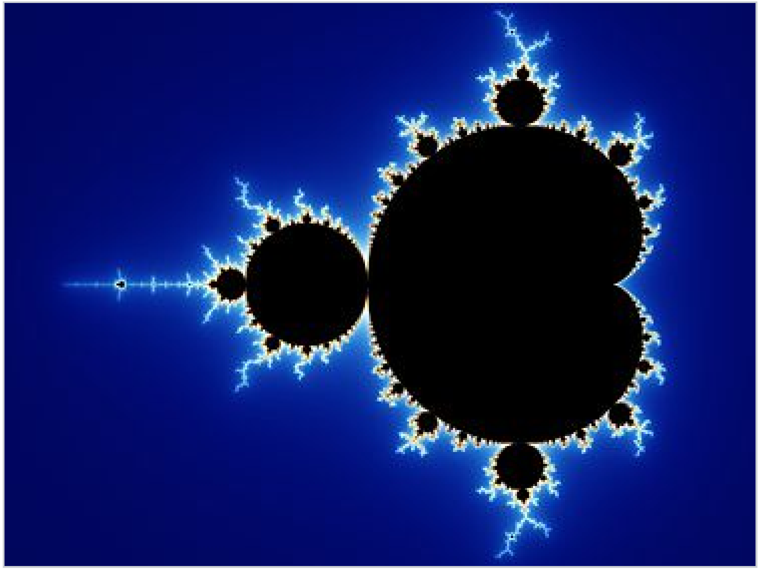
scratch 碎形藝術_雪花

張貼者：2018年7月28日 下午11:41程瑋翔

提示：本條目的主題不是分型。

碎形（英語：Fractal，源自拉丁語：frāctus，有「零碎」、「破裂」之意），又稱**分形**、**殘形**，通常被定義為「一個粗糙或零碎的幾何形狀，可以分成數個部分，且每一部分都（至少近似地）是整體縮小後的形狀」[2]，即具有自相似的性質。 碎形在數學中是一種抽象的物體，用於描述自然界中存在的事物。人工碎形通常在放大後能展現出相似的形狀[3]。 碎形也被稱為**擴展對稱**或**展開對稱**。如果在每次放大後，形狀的重複是完全相同的，這被稱為自相似。自相似的一個例子是門格海綿[4]。 碎形在不同的縮放級別上可以是近似相似的。曼德博集合的放大圖像中顯示了這種模式[2][5][6][7]。 碎形也包有圖像的細節重複自身的意味。[2][5][8]



曼德博集合是**碎形**中的一個很有名的例子。

中國大陸	分形
港臺	碎形[1]

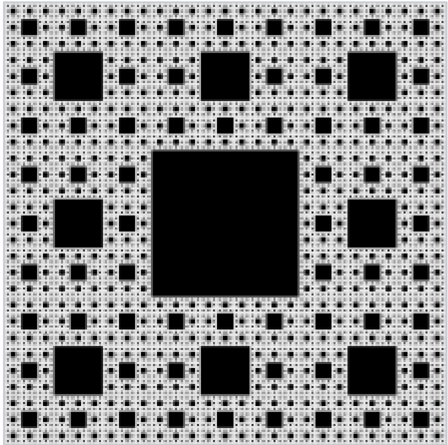
碎形與其他幾何圖形相似但又有所不同。當你縮放一個圖形時，你就能看出碎形和其他幾何圖形的區別。將一個多邊形的邊長加倍，它的面積變為原來的四倍。新的邊長與舊邊長相比增加了 2 倍，而面積增加了 4 倍，即 2^2 倍。平面內的多邊形在二維空間中，指數 2 剛好是多邊形所在的二維空間的維數。類似的，對於三維空間中的球，如果它的半徑加倍，則它的體積變為原來的 8 倍，即 2^3 倍，指數 3 依舊是球所在空間的維數。如果將碎形的一維長度加倍，如將康托三分集的初始線段長加倍，分型空間的內容[註 1]變為 2^n 倍，此時n 不一定是個整數[2]。冪指數n 稱為分型的維數，它通常大於分型的拓撲維數[9]。

作為一個數學函數，碎形通常是處處不可微的[2][7][10]。無窮碎形曲線可以理解為一條一維的曲線在空間中繞行，它的拓撲維數仍然是 1，但大於 1 的碎形維數暗示了它也有類似曲面的性質[2][9]。

我們可以從這些年來正式發表的文獻中追蹤碎形概念的發展史。 從 17 世紀有了遞迴的概念開始，到 19 世紀，伯納德·波爾查諾、波恩哈德·黎曼和卡爾·魏爾斯特拉斯對連續不可微函數開創性的研究[11]，這些嚴謹的數學概念推動著碎形的發展。20 世紀時，人們創造了wikt:碎形這個詞，隨之而來的是人們對碎形和計算機建模和興趣的迅速增長[12][13]。1975 年本華·曼德博首次提出「碎形(fractal)」這個術語。分型的拉丁文詞源*frāctus* 有「破壞」、「破碎」的意思，曼德博將分型的概念從理論碎形維數拓展到自然界中的幾何圖形[2]:405[8]。

一個數學意義上碎形的生成是基於一個不斷疊代的方程式，即一種基於遞迴的反饋系統[6]。碎形有幾種類型，可以分別依據表現出的精確自相似性、半自相似性和統計自相似性來定義。權威學者們對碎形的精確定義仍有爭論。曼德博自己將碎形總結為：「美麗、（研究起來）極其困難但又非常的有用，這就是碎形」[14]。 1982 年曼德博提出了更正式的定義：「碎形是一種其郝斯多夫維數嚴格大於拓撲維數的集合」[註 2]。 後來他認為這種定義過於嚴格，於是簡化並擴展了這個定義：「碎形是由與整體在某些方面相似的部分構成的圖

形。」[15]。又過了一段時間，曼德博決定使用以下方式來描述碎形：「...在研究和使用*碎形*時，不需要迂腐的定義。用*碎形維數* 作為描述各種不同分型的通用術語」[16]。



疊代到第六級的謝爾賓斯基地毯，其拓撲維數為 2，而碎形維數郝斯多夫維數為 1.893

通常認為，理論分型是無限疊代、自相似的、具有碎形維數的詳細數學結構。人們創造了許多分型圖形並進行了充分的研究[2][5][6]。 碎形並不限於幾何圖形，它也可以描述時間序列[4][7][17][18][19][20]。 雖然碎形是一個數學構造，它們同樣可以在自然界中被找到，這使得它們被劃入藝術作品的範疇。碎形在醫學、土力學、地震學和技術分析中都有應用。 在自然[21][22][23][24] [25]、技術[26][27][28][29]、藝術[30][31]、建築[32]和法律[33]等領域，人們對圖形、結構和音頻中不同程度自相似的碎形圖形進行了研究，並反過來利用碎形理論取生成圖形、結構和音頻[34]。碎形和混沌理論密切相關，因為混沌過程的圖形大多數都是碎形[35]。

和數學家們相比，碎形一詞對大眾來說含義不盡相同。相對於數學概念來說，大眾可能更熟悉碎形藝術。即使是對數學家來說碎形也很難定義，但只要一點點數學背景就可以理解碎形的核心特徵。

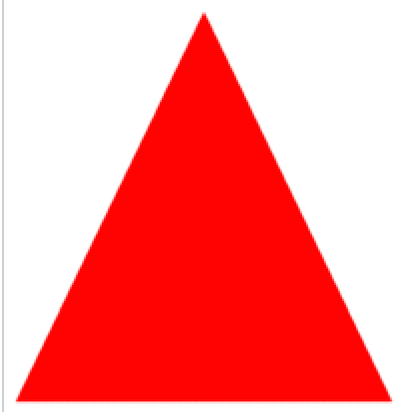
碎形的「自我相似」的特徵很容易通過類比來理解，就像用鏡頭或其他設備放大數字圖像，從而發現以前不可見的、更精細的新結構。如果你放大一個碎形的圖像，則不會出現新的細節；圖像沒什麼變化，相似的圖案一遍又一遍的重複出現。對於有些碎形幾乎完全一樣的圖像會不斷地重複[3]。 自我相似的特徵並非反直覺的。人們在生活中也能看到自我相似的現象，例如：兩面平行的鏡子間的無限重複、山上廟裡老和尚的故事裡的山...碎形的不同之處在於重複的圖案一定有詳細的細節[2]:166; 18[5][8]。

細節性的概念和碎形的另一個特徵——碎形維數有關。碎形維數不需要數學背景，也很容易理解：碎形的碎形維數大於它的拓樸維數，通過將碎形尺度與普通的幾何形狀相比較，我們便能感受到他們的差別。舉個例子，通常認為直線是是一維的，如果直線被分為三部分，每部分都是原來的 1/3 長，你會得到相等的三部分。相比之下，科赫雪花的拓樸維數是 1，和普通的直線一樣，但它的碎形維數大於 1，因為它有很多的細節。雪花曲線被分為原長的 1/3，得到的是 4 條原始雪花曲線重組組合的結果。這種與眾不同的關係是碎形維數的基礎。

這也引出了第三個特徵：碎形在數學上是處處可微函數不可微的。具體的說，這意味著碎形不能用傳統的方法測量[2][7][10]。測量非分型曲線，如波浪曲線的長度，只要放大到足夠大，總能用直線擬合一小段曲線，然後就能用捲尺測量這段直線的長度，再將各段直線長度相加，就可以得出波浪的長度。這樣做實質上是把曲線看作數學上的函數，在一小段範圍內取一階泰勒展開，近似為直線，然後求和總長度。但分型曲線是處處不可微的，如果嘗試使用直線去擬合碎形曲線，如科赫雪花曲線，縮放的過程永遠不會停止，因為曲線圖案的重複模式總會不斷地出現，每次縮放，都需要使用更小的捲尺來貼合曲線[2]。

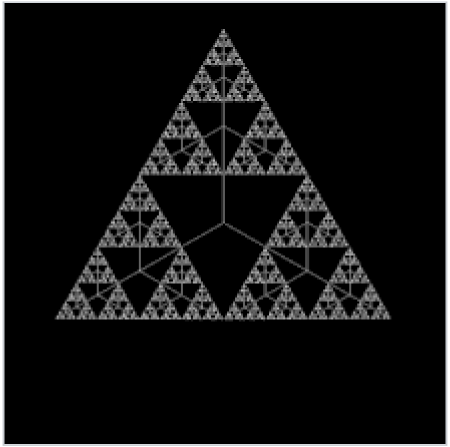
歷史 [編輯]

碎形的歷史可以從主要理論的研究追溯到現代計算機圖形學中的應用，在這個過程中有幾個著名的人物對典型的碎形形式做出了貢獻[12][13]。 根據 Pickover 的說法，17 世紀時，數學家兼哲學家萊布尼茨思考過遞迴的自相似，碎形的數學從那時開始漸漸地成形（雖然他誤認只有直線會自相似）[36]。 在他的著作中萊布尼茨使用了「碎形指數」這個術語，但遺憾的是「幾何」還不知道它們[2]:405。 的確，根據不同史書的記載，在這之後，很少再有數學家嘗試解決這些問題。已有的工作也模糊不清，主要的原因是人們對不熟悉新興概念的牴觸，這些概念有時被稱為數學「怪物」[10][12][13]。



謝爾賓斯基三角形的動畫表示，只顯示出無限遞迴的最初九次。

因此直到兩個世紀之後，1872年7月18日卡爾·魏爾斯特拉斯才在皇家普魯士科學院給出碎形的第一個定義：碎形是一種具有處處連續，但又處處不可微等反直覺性質的函數圖形[12]:7[13]。另外，隨著求和計算值的增加，函數的導數變得任意大[37]。 不久之後，1883年，參加過魏爾施特拉斯課程[13]的格奧爾格·康托爾也給出一個具有不尋常性質的例子：實直線上的子集——康托爾集，現在也被認為是碎形[12]:11–24。同樣的，在那個世紀的末尾，菲利克斯·克萊因和儒勒·昂利·龐加萊也提出了一種稱為「自逆」碎形的碎形[2]:166。



謝爾賓斯基三角形可由碎形樹產生

碎形發展的一個里程碑在 1904 年，當時海里格·馮·科赫不滿意魏爾施特拉斯那抽象和基於分析的定義，它擴展了龐加萊的定義，給出了更加幾何化的定義並附上了一個類似函數的手繪圖形，今天稱之為科赫雪花[12]:25[13]。 另一個里程碑在十年之後， 1905 年瓦茨瓦夫·謝爾賓斯基構造出了謝爾賓斯基三角形；隔年，又造出了謝爾賓斯基地毯。1918 年，兩名法國數學家皮埃爾·法圖和加斯東·茹利亞通過各自獨立的工作，基本上同時得出了描述複數映射以及函數疊代相關碎形行為的結果，並由此引出了之後關於奇異吸引子的想法。吸引子理論之後在碎形理論中占有十分重要的地位[7][12][13]。 在這項鞏固走發表之後不久，1918年3月，費利克斯·郝斯多夫擴展了「維數」的定義，允許幾何具有非整數維數，這對分型定義的發展意義重大[13]。 1938年，保羅·皮埃爾·萊維在他的論文《平面、空間曲線和由與整體自相似部件組成的曲面》中將自相似曲線的概念更進一步地推進，他在文中描述了一個新的碎形曲線－萊維C形曲線[38]。

1960年代，本華·曼德博開始研究自相似，且在路易斯·弗萊·理察森之前工作的基礎上，寫下一篇論文《英國的海岸線有多長？統計自相似和分數維度》。 最終，曼德博在1975年提出了「碎形」一詞，來標記一個郝斯多夫-貝西科維奇維數大於拓樸維數的物件。曼德博以顯著的電腦繪製圖像來描繪此一數學定義，這些圖像征服了大眾的想像；它們中許多都基於遞迴，導致了大眾對術語「碎形」的通俗理解。

不同的研究者推測，由於缺乏現代計算機圖形學的幫助，早期的研究人員受限於工具，只能手繪圖形。因此缺乏可視化碎形之美的手段，也無法欣賞它們發現的許多碎形模式的含義。如茱莉亞集，通過幾次疊代，只能可視化為非常簡單的圖形[2]:179[10][13]。 這種情況在20世

紀60年代得到了改觀，當時本華·曼德博正開始寫他基於劉易斯·弗萊·理查森早期工作的論文：《英國的海岸線有多長？統計自相似和分數維度》[39][40]。 1975年[8]，曼德博將數百年來關於碎形的構思與發展固化在「碎形」一詞上，並用高超的計算機可視化構造來說明他的數學定義。這些圖像，包括他定義的曼德博集合，抓住了大眾的想像力。其中的很多圖形都是基於遞迴的，這也讓「碎形」一詞具有了現在的含義。[41][10][12][36]

1980 年，洛倫·卡彭特在計算機圖形學頂級年會SIGGRAPH上發表了一次演講，演講中他介紹了他基於碎形理論開發的用於產生風景的軟體[42]。

特徵 [編輯]

碎形一般有以下特質：[43]

- 在任意小的尺度上都能有精細的結構；
- 太不規則，以至無論是其整體或局部都難以用傳統歐氏幾何的語言來描述；
- 具有（至少是近似的或統計的）自相似形式；
- 一般地，其「碎形維數」（通常為郝斯多夫維數）會大於拓樸維數（但在空間填充曲線如希爾伯特曲線中為例外）；
- 在多數情況下有著簡單的遞迴定義。

因為碎形在所有的大小尺度下都顯得相似，所以通常被認為是無限複雜的（以不嚴謹的用詞來說）。自然界裡一定程度上類似碎形的事物有雲、山脈、閃電、海岸線、雪片、植物根、多種蔬菜（如花椰菜和西蘭花）和動物的毛皮的圖案等等。但是，並不是所有自相似的東西都是碎形，如實直線雖然在形式上是自相似的，但卻不符合碎形的其他特質，比如說它能被傳統的歐氏幾何語言所描述。

碎形的圖像可以用碎形生成軟體作出。儘管用此類軟體生成的圖像並不具備上述碎形的特徵，比如說存在放大後無上述特徵的局部區域，但是這些圖像通常仍然被稱為碎形。而且這些圖像可能含有由計算或顯示造成的人為偏差——一些不屬於碎形的特徵。

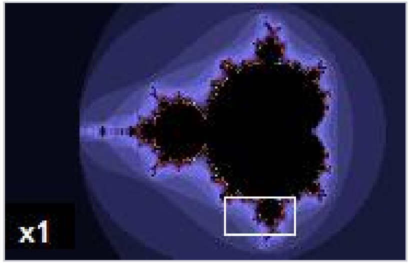
示例 [編輯]

一類碎形的典型例子有：康托爾集、謝爾賓斯基三角形和地毯、門格海綿、龍形曲線、皮亞諾曲線和科赫曲線。其他的例子包括李亞普諾夫碎形及克萊因群的極限集。碎形可以是確定性的，如上述所有的碎形；也可以是隨機的（即非確定性的）。比如說，平面上布朗運動的軌跡的郝斯多夫維數等於2。

混沌動力系統有時候會和碎形聯繫起來。動力系統的相空間中的對象可以是碎形（參見吸引子），一族系統的參數空間中的對象也可以是碎形。一個有意思的例子就是曼德博集。這個集合包含很多完整的圓盤，所以它的郝斯多夫維數等於它的拓樸維數2；但是真正令人驚訝

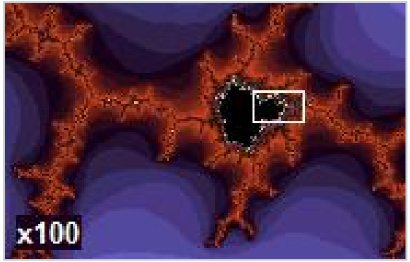
的是，曼德博集的邊界的郝斯多夫維數也是2（而拓樸維數是1），這個結果由宍倉光廣（Mitsuhiro Shishikura）在1991年證明。一個與曼德博集緊密相關的碎形是朱利亞集。

造法 [編輯]

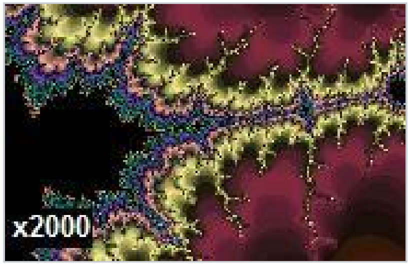


完整曼德博集合

曼德博集合放大6倍



曼德博集合放大100倍



曼德博集合放大2000倍

四個製造碎形的一般技術如下：

- **逃逸時間碎形**：由空間（如複平面）中每一點的遞迴關係式所定義，例如曼德博集合、茹利亞集合、火燒船碎形、牛頓碎形和李亞普諾夫碎形等。由一次或兩次逃逸時間公式的疊代生成的二維向量場也會產生碎形，若點在此一向量場中重複地被通過。
- **疊代函數系統**：使用固定的幾何替代規則生成碎形，得到的結果可能是隨機的或確定的[44]

Haferman 地毯[45]、康托爾集、謝爾賓斯基三角形、謝爾賓斯基地毯、皮亞諾曲線、科赫雪花、龍形曲線、T-方形碎形、門格海綿等都是此類碎形的一些例子。

- **隨機碎形**：由隨機而無確定過程產生，如布朗運動的軌跡、萊維飛行、碎形風景和布朗樹等。後者會產生一種稱之為樹狀碎形的碎形，如擴散限制聚集或反應限制聚集束[7]。
- **奇異吸引子**：以一個映射的疊代或一套會顯出混沌的初值微分方程式所產生。

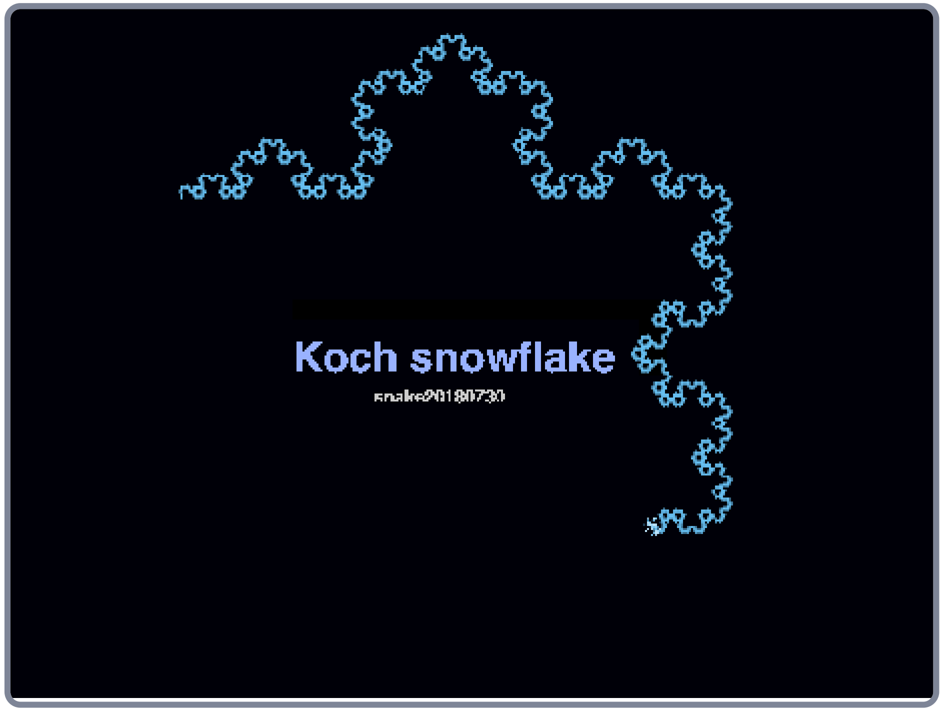
分類 [編輯]

碎形也可以依據其自相似來分類，有如下三種：

- **精確自相似**：這是最強的一種自相似，碎形在任一尺度下都顯得一樣。由疊代函數系統定義出的碎形通常會展現出精確自相似來。
- **半自相似**：這是一種較鬆的自相似，碎形在不同尺度下會顯得大略（但非精確）相同。半自相似碎形包含有整個碎形扭曲及退化形式的縮小尺寸。由遞迴關係式定義出的碎形通常會是半自相似，但不會是精確自相似。
- **統計自相似**：這是最弱的一種自相似，這種碎形在不同尺度下都能保有固定的數值或統計測度。大多數對「碎形」合理的定義自然會導致某一類型的統計自相似（碎形維數本身即是個在不同尺度下都保持固定的數值測度）。隨機碎形是統計自相似，但非精確及半自相似的碎形的一個例子。

https://scratch.mit.edu/projects/237634242/

即使將曼德博集合放大2000倍,還是會顯示出類似整個集合的精細結構。



註解

您沒有新增註解的權限。


響尾蛇數學天地
SNAKE